۳-۳-۲ تحلیل پاسخ دینامیکی با استفاده از تعامد مودها

ماتریس‌های ستونی شکل مودها $\{\varphi_1\},\{\varphi_2\},...,\{\varphi_N\}$ را می‌توان یکجا در یک ماتریس مربعی به نام ماتریس شکل مودها بیان کرد. رابطه‌ی (۳-۲۷) ماتریس مربعی $[\varphi]$ را نشان می‌دهد.

$$[\varphi]=\left[\{\varphi_1\},\{\varphi_2\},...,\{\varphi_N\}\right] \tag{۳-۲۷}$$

هر یک از مودها در تغییر مکان کل سازه سهمی دارند، به گونه‌ای که می‌توان بردار تغییر مکان $\{u\}$ را به صورت حاصل‌ضرب ماتریس $[\varphi]$ در یک بردار به نام مختصات نرمال $\{y\}$ بیان نمود.

$$\{u\}=[\varphi]\{y\} \tag{۳-۲۸}$$

درایه‌ی nام بردار $\{y\}$ را با y_n نمایش می‌دهیم. چنان‌چه طرفین رابطه‌ی (۳-۲۸) را در $\{\varphi_n\}^T[M]$ ضرب کنیم، خواهیم داشت،

$$\{\varphi_n\}^T[M]\{u\}=\{\varphi_n\}^T[M][\varphi]\{y\} \tag{۳-۲۹}$$

با بسط طرف راست رابطه‌ی (۳-۲۹) و استفاده از رابطه‌ی (۳-۲۷) می‌توان نوشت،

$$\{\varphi_n\}^T[M]\{u\}=\{\varphi_n\}^T[M]\{\varphi_1\}y_1+\{\varphi_n\}^T[M]\{\varphi_2\}y_2+...+\{\varphi_n\}^T[M]\{\varphi_N\}y_N \tag{۳-۳۰}$$

با توجه به شرط تعامد مودها نسبت به ماتریس جرم یعنی $\{\varphi_n\}^T[M]\{\varphi_m\}=0$ برای $m\neq n$ تمام جملات سمت راست رابطه‌ی (۳-۳۰) به استثنای جمله‌ی $\{\varphi_n\}^T[M]\{\varphi_n\}$ حذف می‌گردند. بنابراین،

$$\{\varphi_n\}^T[M]\{u\}=\{\varphi_n\}^T[M]\{\varphi_n\}y_n \tag{۳-۳۱}$$

به دلیل تعامد مودها نسبت به ماتریس سختی رابطه‌ی (۳-۳۱) را می‌توان برای ماتریس سختی $[K]$ هم نوشت،

$$\{\varphi_n\}^T[K]\{u\}=\{\varphi_n\}^T[K]\{\varphi_n\}y_n \tag{۳-۳۲}$$

با مشتق‌گیری از رابطه‌ی (۳-۳۱) خواهیم داشت،

$$\{\varphi_n\}^T[M]\{\ddot{u}\}=\{\varphi_n\}^T[M]\{\varphi_n\}\ddot{y}_n \tag{۳-۳۳}$$

رابطه‌ی (۳-۱۷) بیانگر ارتعاش آزاد سازه بود. برای سازه‌ای که تحت اثر بردار بارگذاری $\{P(t)\}$ در درجات آزادی خود قرار دارد، رابطه‌ی (۳-۱۷) چنین نوشته خواهد شد،

$$[M]\{\ddot{u}\}+\{K\}\{u\}=\{P(t)\} \tag{۳-۳۴}$$

با ضرب طرفین رابطه‌ی (۳-۳۴) در $\{\varphi\}_n^T$ و جایگزینی از روابط (۳-۳۲) و (۳-۳۳) می‌توان نوشت،

$$\{\varphi_n\}^T[M]\{\varphi_n\}\ddot{y}_n+\{\varphi_n\}^T[K]\{\varphi_n\}y_n=\{\varphi_n\}^T\{P(t)\} \tag{۳-۳۵}$$

اکنون پارامترهای M_n، K_n و $P_n(t)$ را تعریف می‌کنیم.

$$M_n=\{\varphi_n\}^T[M]\{\varphi_n\} \tag{۳-۳۶- الف}$$

$$K_n=\{\varphi_n\}^T[K]\{\varphi_n\} \tag{۳-۳۶- ب}$$

$$P_n(t)=\{\varphi_n\}^T\{P(t)\} \tag{۳-۳۶- پ}$$

M_n، K_n و $P_n(t)$ را به ترتیب جرم مودی، سختی مودی و نیروی تعمیم یافته‌ی مربوط به مود nام می‌نامند.

چنان‌چه نیروی اعمالی به سازه ناشی از $\ddot{u}_g$ شتاب زمین باشد، خواهیم داشت،

$$\{P(t)\}=-[M]\{r\}\ddot{u}_g \tag{۳-۳۷}$$

بردار $\{r\}$ در رابطه‌ی (۳-۳۷) بردار ستونی با درایه‌های واحد است و برای حفظ توازن ابعاد در این رابطه به کار رفته است. با جایگزینی روابط (۳-۳۶) و (۳-۳۷) در رابطه‌ی (۳-۳۵) و تقسیم طرفین بر M_n و با توجه به $K_n=M_n\omega_n^2$ خواهیم داشت،

$$\ddot{y}_n+\omega_n^2 y_n=-\frac{\{\varphi_n\}^T[M]\{r\}\ddot{u}_g}{M_n} \tag{۳-۳۸}$$

رابطه‌ی (۳-۳۸) را برای سیستم‌های چند درجه آزاد با میرایی می‌توان به صورت رابطه‌ی (۳-۳۹) نوشت،

$$\ddot{y}_n+2\xi_n\omega_n\dot{y}_n+\omega_n^2 y_n=\frac{-L_n}{M_n}\ddot{u}_g \tag{۳-۳۹}$$

که در آن،

$$L_n=\{\varphi_n\}^T[M]\{r\} \tag{۳-۴۰}$$

L_n را ضریب تحریک مود nام می‌نامند.

رابطه‌ی (۳-۳۹) همراه با روابط (۳-۳۶) و (۳-۴۰) کلید تحلیل دینامیکی به روش طیفی (تحلیل مودها) هستند. معادله‌ی (۳-۳۹) در واقع یک سیستم با N درجه آزادی با درجات آزادی درگیر را به N معادله‌ی مستقل برای هر مود تبدیل می‌کند. به بیان دیگر یک سیستم با N درجه آزادی به N معادله با یک درجه آزادی تبدیل می‌شود.

M_n و L_n را می‌توان به جای روابط (۳-۳۶- الف) و (۳-۴۰) از روابط (۳-۴۱) و (۳-۴۲) که در واقع شکل بسته‌ی روابط مذکور هستند، به دست آورد.

$$M_n = \sum_{i=1}^{N} m_i \varphi_{in}^2 \qquad (۳\text{-}۴۱)$$

$$L_n = \sum_{i=1}^{N} m_i \varphi_{in} \qquad (۳\text{-}۴۲)$$

روابط (۳-۲۷) الی (۳-۴۲) در واقع بیانگر آن هستند که رفتار یک سازه‌ی چند درجه آزاد مجموعه‌ای از مودهای ارتعاشی در نظر گرفته می‌شود. به عبارت دیگر برای مود nام، زمان تناوب T_n، شکل مود $\{\varphi_n\}$، جرم مودی M_n و ضریب تحریک L_n به آسانی از این روابط قابل محاسبه است. بنابراین با استفاده از رابطه‌ی (۳-۳۹) و محاسبه‌ی انتگرال دو هامل می‌توان شتاب حداکثر سازه مربوط به مود nام را تعیین کرد.

معمولاً به جای محاسبه‌ی انتگرال دو هامل از طیف شتاب استفاده می‌شود. در صورتی که از طیف بازتاب استاندارد ۲۸۰۰ استفاده شود، باید S_{an} را در ضریب $\frac{L_n}{M_n}$ - رابطه‌ی (۳-۳۹) ضرب کرد.

S_{an} با استفاده از مقادیر طیف استاندارد ۲۸۰۰ برای زلزله‌ی طرح و زلزله‌ی سطح بهره‌برداری چنین است،

$$S_{an} = \frac{AB_n I}{R_u} \quad \text{(زلزله‌ی طرح)} \qquad (۳\text{-}۴۳)$$

$$S_{an} = \frac{1}{6} AB_n I \quad \text{(زلزله‌ی سطح بهره‌برداری)} \qquad (۳\text{-}۴۴)$$

بنابراین بردار شتاب مودی $\{\ddot{u}_n\}$ برابر خواهد بود با،

$$\{\ddot{u}_n\} = \{\varphi_n\} \frac{L_n}{M_n} S_{an} \qquad (۳\text{-}۴۵)$$

با توجه به رابطه‌ی $\omega_n = \frac{2\pi}{T_n}$ و نیز $S_{dn} = \omega_n^2 S_{an}$ بردار تغییر مکان مودی سازه برابر است با،

$$\{u_n\}=\{\varphi_n\}\frac{L_n}{M_n}\times\frac{T_n^2}{4\pi^2}S_{an} \qquad (۴۶-۳)$$

$\{f_n\}$ بردار نیروی مودی هر طبقه برابر حاصل‌ضرب ماتریس جرم $[M]$ در بردار شتاب مودی $\{\ddot{u}_n\}$ است.

$$\{f_n\}=[M]\{\ddot{u}_n\} \qquad (۴۷-۳)$$

برش طبقه‌ی iام درمود nام از جمع مؤلفه‌های بردار نیروی طبقات بالاتر به دست می‌آید.

ترکیب اثر مودها

در روش تحلیل پاسخ دینامیکی با استفاده از تعامد مودها که در قسمت قبل تشریح شد، حداکثر بازتاب‌های مختلف سازه (نیروها، تلاش‌ها و تغییر مکان‌ها) برای هر مود محاسبه گردید. چون این حداکثر بازتاب‌ها برای مودهای مختلف در یک زلزله به طور هم‌زمان اتفاق نمی‌افتد، با روش‌های آماری، ترکیبی از این حداکثر بازتاب‌های مودهای مختلف در نظر گرفته می‌شود. یکی از روش‌های متداول روش جذر مجموع مربعات[1] یا روش SRSS است.

$$q_{max}=\left(\sum_{n=1}^{N}q_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (۴۸-۳)$$

در رابطه‌ی (۳-۴۸) q_n بازتاب درجه آزادی موردنظر برای مود nام بوده و N تعداد مودهای تحت بررسی است.

استاندارد ۲۸۰۰ در صورتی استفاده از روش SRSS را مجاز می‌داند که زمان تناوب مودهای مختلف با یکدیگر متفاوت بوده و از هم فاصله‌ی کافی داشته باشند، به نحوی که رابطه‌ی (۳-۴۹) برقرار باشد.

$$\frac{T_m}{T_n}\le ۰/۶۷ \qquad (T_m<T_n) \qquad (۴۹-۳)$$

در رابطه‌ی (۳-۴۹)، T_m و T_n به ترتیب زمان‌های تناوب طبیعی برای مودهای m و n است.

1- Square Root of the Sum of the Squares

در صورتی که رابطه‌ی (۳-۴۹) صادق نباشد، جواب‌های به دست آمده از روش جذر مجموع مربعات قابل اعتماد نبوده و بهتر است رویکرد دیگری که به روش ترکیب مربعی کامل[1] یا روش CQC موسوم است، به کار گرفته شود. این روش در اکثر حالت‌ها قابل استفاده است.

$$q_{max} = \left(\sum_{n=1}^{N} q_n^2 + 2 \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=n+1}^{N} \rho_{nm} q_n q_m \right)^{\frac{1}{2}}$$

(۳-۵۰- الف)

در رابطه‌ی (۳-۵۰- الف) مقادیر q_n و q_m حداکثر بازتاب‌های سازه در درجه‌ی آزادی موردنظر به هنگام ارتعاش سازه به ترتیب در مودهای n و m بوده و ρ_{nm} ضریب بین مودی است که از رابطه‌ی (۳-۵۰- ب) محاسبه می‌شود. هم‌چنین باید توجه داشت در محاسبه‌ی q_{max} طبق رابطه‌ی (۳-۵۰- الف)، علامت‌های q_n و q_m باید رعایت شود.

$$\rho_{nm} = \frac{8\xi^2 (1+r) \times r^{\frac{3}{2}}}{(1-r^2)^2 + 4\xi^2 r(1+r)^2}$$

(۳-۵۰- ب)

در رابطه‌ی (۳-۵۰- ب)،

ξ = نسبت میرایی سازه که ۰/۰۵ منظور می‌شود.

r = نسبت پریود مود mام به مود nام

$$r = \frac{T_m}{T_n} \text{ ، } T_m < T_n$$

(۳-۵۰- پ)

تعداد مودهای نوسان

در روش تحلیل دینامیکی طیفی لازم نیست تمام مودهای ارتعاشی (به اندازه‌ی درجات آزادی سازه) در محاسبات منظور شود. طبق ویرایش چهارم استاندارد ۲۸۰۰ در هر یک از دو امتداد متعامد ساختمان لازم است کلیه‌ی مودهای نوسان که مجموع جرم‌های مؤثر در آن‌ها بیش‌تر از ۹۰ درصد جرم کل سازه باشد، در نظر گرفته شود. M_{en} جرم مؤثر در مود nام را می‌توان از رابطه‌ی (۳-۵۱) تعیین کرد.

$$M_{en} = \frac{L_n^2}{M_n} \qquad (۳-۵۱)$$

1- Complete Quadratic Combination